

# L'algorithme de Newton-Hooke

P. Couillet <sup>1</sup>, M. Monticelli

*INLN, 1361 route des lucioles, 06560 Valbonne*

et

J. Treiner

*LPTMS, Bâtiment 100 Université Paris-Sud*

*15, rue Georges Clémenceau 91405 Orsay Cedex*

## 1 Introduction

Résoudre des équations différentielles constitue l'un des problèmes techniques les plus importants dans les sciences de l'ingénieur. Ces équations sont aujourd'hui résolues sur ordinateur, au moyen de diverses méthodes d'approximation. Pour ne prendre qu'un exemple, mais il est frappant, le calcul de la position de la Terre sur son axe de rotation, essentiel au positionnement par satellite (GPS), est basé sur un modèle d'une Terre non-rigide et fait intervenir la résolution de millions d'équations différentielles. Ce modèle a été retenu début Juillet 2003 par la communauté internationale pour établir les tables de correspondance entre le référentiel terrestre et celui du satellite, et a été récompensé par le prix Descartes [1] de la Commission Européenne. Il conduit à une précision de la localisation d'un objet terrestre de moins de dix centimètres.

La résolution d'une équation différentielle n'est pas simple en général, notamment lorsque son degré est supérieur à un. La première méthode d'approximation des solutions d'une équation différentielle est due à Léonard Euler [2]. Elle revient à remplacer les différentielles par des accroissements finis. Remplacer une dérivée par le rapport de deux différences finies conduit généralement à une erreur dont l'ampleur dépend du pas de discrétisation. La justification rigoureuse du passage à la limite, lorsque le "pas de discrétisation" tend vers 0, permettra à Cauchy de développer la théorie moderne des équations différentielles.

Dans l'enseignement des sciences au lycée, la méthode d'Euler a été introduite à l'occasion de la mise en place des programmes de mathématiques en classe de première scientifique en septembre 2001. Le contexte proposé est celui de la construction de l'approximation d'une courbe intégrale définie par  $y'(t) = f(t)$  et  $y(t_0) = y_0$  en utilisant l'approximation  $\Delta f = f'(t)\Delta t$ . Elle permet de faire réfléchir l'élève à la signification de la dérivée d'une fonction selon un cheminement inverse de celui qui conduit à sa définition : au lieu de calculer la dérivée

---

<sup>1</sup>Membre de l'Institut Universitaire de France

d'une fonction connue, on construit une fonction inconnue de proche en proche à partir de la connaissance de sa dérivée locale. La notion de limite peut être reliée à celle du choix du pas de discrétisation. L'élève perçoit également l'importance de la condition initiale.

En classe terminale scientifique, la méthode d'Euler est utilisée dans des contextes variés où une grandeur physique obéit à une équation différentielle de la forme  $y' = ay + b$ . Décroissance radioactive, circuits électriques simples, chute de mobiles sous l'effet de la pesanteur et d'une force de frottement fluide, autant de situations conduisant à des évolutions exponentielles pour lesquelles la méthode d'Euler peut être mise en oeuvre aisément à l'aide d'un tableur. Un des enjeux de ces activités consiste, par la manipulation d'accroissements finis, à faciliter l'appropriation future de la notion de différentielle, au cours des études post-baccalauréat.

La méthode d'Euler, qui constitue une excellente introduction aux méthodes de discrétisation, est cependant de précision limitée. Elle est souvent remplacée par des méthodes plus sophistiquées qui permettent une meilleure précision dans le calcul des solutions. Ces méthodes sont toutes basées sur un processus de discrétisation dans lequel l'équation différentielle est remplacée par une équation aux différences finies.

Le but du présent article est de mettre en regard la méthode d'Euler, comme méthode d'approximation des équations du mouvement de la dynamique, avec la discrétisation implicite contenue dans l'exposé des principes de la mécanique par Isaac Newton dans les Principia (1687 pour la première édition en latin). *Cette discrétisation ne résulte pas, comme on va le voir, de la recherche d'une approximation d'équations continues, que Newton ne formule d'ailleurs pas, mais repose sur une vision d'emblée discrétisée, impulsionnelle, du mouvement, que Robert Hooke a proposée dès le milieu des années 1660 ([3]).* La surprise, c'est de constater d'une part que cette discrétisation ne coïncide pas avec celle d'Euler, et d'autre part qu'elle réalise une bien meilleure approximation des équations exactes !

## 2 La discrétisation des équations de la dynamique et les lois de conservation

### 2.1 L'algorithme d'Euler

Soit l'équation différentielle autonome<sup>2</sup> du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

---

<sup>2</sup>c'est-à-dire dont le second membre ne dépend pas explicitement du temps

La méthode d'Euler consiste à remplacer l'équation différentielle par une équation aux différences finies. Celle-ci est obtenue à partir de l'approximation selon laquelle on remplace la dérivée par le rapport de deux accroissements finis

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2)$$

ou, en posant  $\Delta t = h$

$$\Delta x = x(t+h) - x(t) \quad (3)$$

On obtient donc :

$$x(t+h) - x(t) = hf(x(t)) \quad (4)$$

Définissant  $x_n = x(t+nh)$ , l'équation aux différences finies devient une relation de récurrence du premier ordre

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n) \quad (5)$$

La méthode d'Euler constitue, tant par sa simplicité que par son caractère historique, le fondement de l'analyse numérique des solutions des équations différentielles ordinaires. En remplaçant dans l'équation (4)  $x(t+h)$  par son développement de Taylor au premier ordre :  $x(t) + hdx/dt + 0(h^2)$ , on vérifie que l'équation aux différences finies (4) est une approximation d'ordre un de l'équation différentielle (1).

La méthode d'Euler se généralise simplement à des équations différentielles du premier ordre couplées, comme celles de la mécanique. L'équation qui décrit le mouvement d'une masse ponctuelle sur une droite sous l'effet d'une force s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (6)$$

$$m \frac{dv}{dt} = f(x) \quad (7)$$

où  $x$  représente la position de la masse et  $f(x)$  la force. L'équation (6) définit la vitesse. L'équation (7), elle, exprime la deuxième loi de Newton sous sa forme différentielle. L'approximation d'Euler des solutions de ces équations est donnée par les relations

$$x_{n+1} = x_n + hv_n \quad (8)$$

$$v_{n+1} = v_n + h \frac{f(x_n)}{m} \quad (9)$$

Dans le cas d'un mouvement plan, comme celui des planètes, ces équations se généralisent en :

$$x_{n+1} = x_n + hv_{1,n} \quad (10)$$

$$y_{n+1} = y_n + hv_{2,n} \quad (11)$$

$$v_{1,n+1} = v_{1,n} + h \frac{f_1(x_n, y_n)}{m} \quad (12)$$

$$v_{2,n+1} = v_{2,n} + h \frac{f_2(x_n, y_n)}{m} \quad (13)$$

## 2.2 L'algorithme de Newton-Hooke et la loi des aires

Une centaine d'années avant la publication d'Euler, I. Newton développait dans ses "Principia" [4], [5] une méthode de discrétisation du mouvement basée sur un modèle physique du mouvement dans lequel les forces agissent de façon discontinue, par une série d'impulsions de plus en plus fréquentes mais d'amplitudes de plus en plus petites. La deuxième loi du mouvement que l'on traduit par la fameuse équation

$$\vec{f} = m\vec{a} \quad (14)$$

n'a en réalité jamais été énoncée explicitement par Newton sous cette forme<sup>3</sup>. La deuxième loi stipule simplement que *"le changement de mouvement est proportionnel à la force motrice imprimée et se produit le long de la ligne droite dans laquelle cette force est imprimée"*. *Mouvement* signifie ici la quantité de mouvement, c'est à dire le produit de la masse et de la vitesse. Par *force motrice imprimée*, Newton entend une force qui agit pendant un temps très bref. Exprimé sous forme algébrique, il s'agit donc de l'équation :

$$m\vec{\Delta v} = \vec{f} \Delta t \quad (15)$$

Pour bien comprendre le modèle mécanique que Newton a en tête, il faut se reporter à sa démonstration de la loi des aires (deuxième loi de Kepler), donnée dans la Proposition I de la seconde section du Livre 1 (Théorème I). Suivons son raisonnement pas à pas, en nous appuyant sur la figure 1 :

*"Supposons que le temps soit divisé en parties égales (discrétisation), et que dans la première partie de ce temps, le corps, par la force qui lui a été imprimée, décrive le segment AB : suivant la première loi du mouvement (la loi de l'inertie) dans un second temps égal au premier, il décrirait, si rien ne l'en empêchait, le*

<sup>3</sup>Comme l'a montré de façon très convaincante Michel Blay [6], la ré-écriture des Principia dans le langage formel du calcul différentiel de Leibnitz est en grande partie l'oeuvre de Varignon

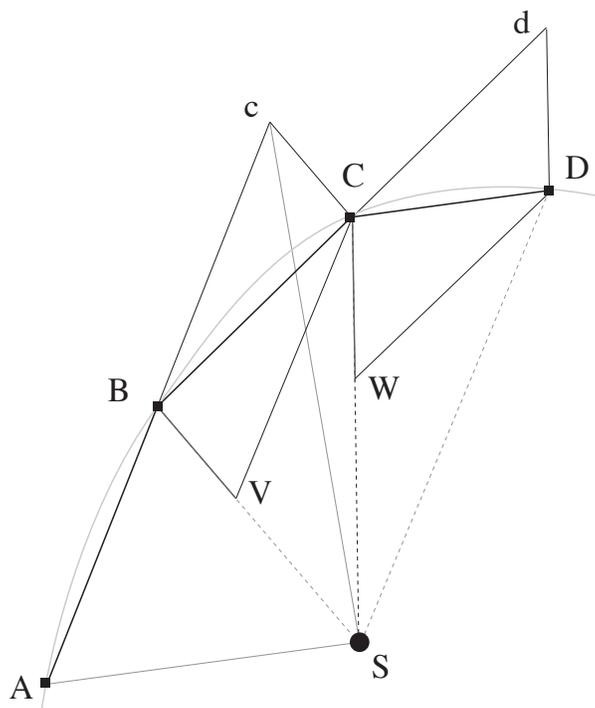


FIG. 1 – Construction de la proposition I de la section I du Livre I. Pour Newton, l'orbite est donnée. Le point  $c$  est obtenu en continuant la trajectoire  $AB$  ( $Bc = AB$ ). Du point  $c$  on mène la parallèle à  $BS$ .  $C$  est obtenu comme l'intersection avec l'orbite. L'orbite n'a cependant pas été tracée par Newton. Les triangles  $SAB$  et  $SBc$ , correspondant au mouvement inertiel, ont la même aire puisqu'ils ont un côté et la hauteur correspondante égaux. De façon similaire, les triangles  $SBc$  et  $SBC$  ont eux aussi les mêmes aires. Cette construction, que l'on peut considérer comme la pierre angulaire des "Principia" a été suggérée à Newton par Robert Hooke lors d'une correspondance dont l'importance est désormais connue (voir [3]). Pour R. Hooke, les points sont les approximations d'une orbite. Ils sont obtenus en calculant les déflexions  $BV$ ,  $CW$ , ..., proportionnelles aux forces en  $B$ ,  $C$ , ... Cette construction est équivalente à l'algorithme des équations (18-21).

segment  $Bc = AB$ . Donc les aires  $ASB$  et  $BSc$  seraient égales. Supposons que lorsque ce corps est arrivé en  $B$ , la force centrale agisse sur lui par un seul coup (modèle impulsionnel), mais assez puissant pour l'obliger à se détourner de la droite  $Bc$  et à suivre la droite  $BC$ . A la fin de ce second temps, le corps sera en  $C$ . L'aire du triangle  $SBC$  sera égale à celle du triangle  $SBc$ , car  $SB$  et  $Cc$  sont parallèles, donc elle sera aussi égale à celle de  $SAB$ ".

Notons que le résultat ne dépend pas du pas de discrétisation, et que les points successifs sont pris sur la trajectoire exacte. Newton compose ici les déplacements,  $\vec{Bc}$  et  $\vec{cC}$ , mais il s'agit en réalité d'une composition des vitesses, puisque les intervalles de temps sont fixes : la vitesse avec laquelle le corps quitte le point  $B$  est la somme de la vitesse acquise précédemment et du changement de vitesse produit par l'impulsion reçue en  $B$ . Si le point  $A$  est le  $n$ ème point de discrétisation et le point  $B$  le  $(n+1)$ ème, l'algorithme de calcul de la vitesse s'écrit donc :

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \vec{\Delta v}_{n+1} \quad (16)$$

Or le changement de la vitesse en  $B$  fait évidemment intervenir la force en ce point (c'est la deuxième loi, façon Newton), d'où :

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \frac{\vec{f}_{n+1}}{m} \quad (17)$$

Par projection sur des axes de coordonnées, et en posant  $\Delta t = h$  comme précédemment, cette équation se décompose en :

$$v_{1,n+1} = v_{1,n} + h \frac{f_1(x_{n+1}, y_{n+1})}{m} \quad (18)$$

$$v_{2,n+1} = v_{2,n} + h \frac{f_2(x_{n+1}, y_{n+1})}{m} \quad (19)$$

Ces équations sont effectivement opératoires, car le point  $B$  est connu. Ses coordonnées sont en effet données par :

$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + hv_{1,n} \quad (20)$$

$$x_{2,n+1} = x_{2,n} + hv_{2,n} \quad (21)$$

On voit que cette discrétisation du mouvement est différente de celle obtenue par la méthode d'Euler au paragraphe précédent, laquelle, par conséquent, conduit à une construction géométrique où la loi des aires n'est pas respectée !

### 2.3 Discrétisation et conservation de l'énergie

Les deux discrétisations diffèrent également en ce qui concerne la conservation de l'énergie. Revenons pour simplifier la discussion à un problème à une dimension : celui du mouvement d'une masse ponctuelle soumise à une force de rappel

$f(x) = -kx$ . Au cours du temps, vitesse et position de cet "oscillateur harmonique" changent en laissant invariante une quantité, que l'on identifie à l'énergie du système mécanique.

En effet des équations du mouvement (équations (6) et (7)) où  $f(x) = -kx$ , on peut déduire, en éliminant  $dt$ , que

$$k \frac{dx}{v} = -m \frac{dv}{x} \quad (22)$$

c'est-à-dire

$$mv \cdot dv + kx \cdot dx = 0 \quad (23)$$

ou encore

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \quad (24)$$

Cette expression différentielle traduit l'invariance de l'énergie

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (25)$$

Voyons maintenant comment la discrétisation affecte la conservation de l'énergie. L'approximation d'Euler de l'équation différentielle est donnée par les relations de récurrence

$$x_{n+1} = x_n + hv_n \quad (26)$$

$$v_{n+1} = v_n - h \frac{k}{m} x_n \quad (27)$$

L'énergie à la  $(n + 1)^{ieme}$  itération est donnée par l'expression

$$E_{n+1} = \frac{1}{2}mv_{n+1}^2 + \frac{1}{2}kx_{n+1}^2 \quad (28)$$

En remplaçant positions et vitesses à la  $(n+1)^{ieme}$  itération par leurs expressions (26) et (27) à la  $n^{ieme}$  itération, on obtient une relation de récurrence pour l'énergie

$$E_{n+1} = \left(1 + h^2 \frac{k}{m}\right) E_n \quad (29)$$

Il s'agit d'une série géométrique de raison  $r = 1 + h^2 k/m$ . Non seulement l'énergie de l'oscillateur n'est pas conservée dans l'approximation d'Euler, mais elle croît *géométriquement*. Bien que cette croissance soit d'autant plus faible que le pas de temps  $h$  est petit, elle conduit à une limitation sérieuse de l'approximation numérique. De façon générale la méthode d'Euler *ne conserve pas* l'énergie.

Dans le cas de la discrétisation de Newton-Hooke, on part des équations :

$$x_{n+1} = x_n + hv_n \quad (30)$$

$$v_{n+1} = v_n - h \frac{k}{m} x_{n+1} \quad (31)$$

En construisant à partir de ces relations l'énergie  $E_{n+1}$ , on obtient d'abord la relation :

$$E_{n+1} = E_n - \frac{1}{2}h^2kv_n^2 + \frac{1}{2}h^2\frac{k^2}{m}x_{n+1}^2 \quad (32)$$

On remplace dans le second terme du second membre une puissance de  $v_n$  par son expression en fonction de  $x_n$  et  $x_{n+1}$ , et dans le troisième terme une puissance de  $x_{n+1}$  par son expression en fonction de  $v_n$  et  $v_{n+1}$ . On trouve alors :

$$E_{n+1} + \frac{1}{2}hkv_{n+1}x_{n+1} = E_n + \frac{1}{2}hkv_nx_n \quad (33)$$

soit, en revenant à l'expression de la force :

$$E_{n+1} - \frac{1}{2}hf(x_{n+1})v_{n+1} = E_n - \frac{1}{2}hf(x_n)v_n \quad (34)$$

Bien que la discrétisation introduise une erreur, il existe bien dans ce cas un *invariant*. L'existence de cet invariant a des conséquences importantes sur le comportement des solutions numériques des équations du mouvement.

A titre d'exemple, considérons le mouvement d'un mobile de masse unité soumis à une force attractive  $-1/r^2$  ("1" ici a une dimension !). La figure 2 montre les résultats des deux algorithmes pour des conditions initiales identiques telles que la trajectoire exacte soit un cercle de rayon 1 : la position initiale est prise au point (0, 1) avec une vitesse initiale (1, 0). Pour comparaison, la période du mouvement est égale à  $2\pi$ .

Les spirales obtenues avec la méthode d'Euler correspondent au fait que l'énergie du mobile augmente avec le temps : celui-ci s'éloigne nécessairement du centre attracteur. En effet, compte tenu des valeurs prises pour les constantes, l'accélération est égale à  $1/r^2$ , d'où  $v = 1/\sqrt{r}$ . L'énergie mécanique  $\frac{1}{2}v^2 - 1/r$  est donc égale à  $-1/(2r)$  : la distance  $r$  augmente avec l'énergie.

La méthode de Newton-Hooke, en revanche, donne la bonne trajectoire pour les deux valeurs de  $h$  les plus petites. De plus, fait remarquable, pour des valeurs de  $h$  "trop" grandes (ici, 0.5), la trajectoire cesse d'être circulaire mais demeure confinée dans une couronne : ceci est la conséquence de l'existence d'un invariant associé à l'énergie.

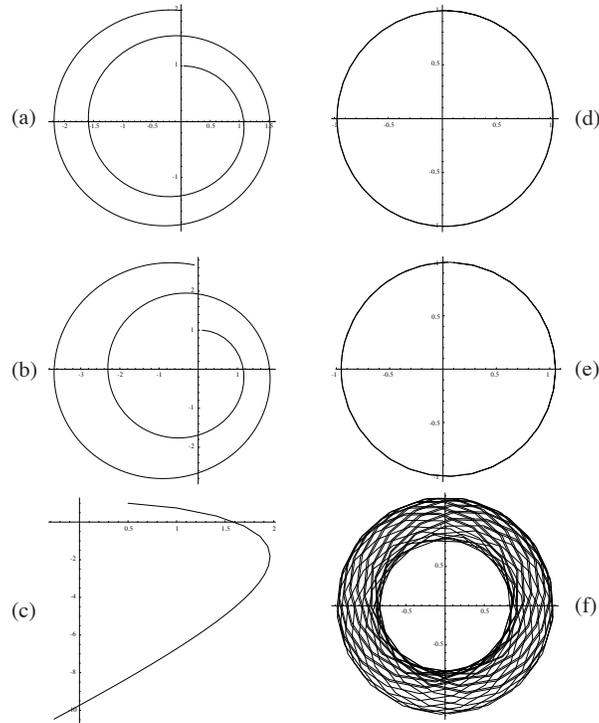


FIG. 2 – Intégration des équations du mouvement : (a) (b) (c) par la méthode de Euler et (d) (e) (f) par la methode correspondant à l'équation (49) du texte. Les pas de temps sont respectivement  $h = 0.05, 0.1, 0.5$ . Une simulation interactive correspondant à cette figure peut être trouvée sur le site [www.thinknonlinear.com/NewtonHooke/](http://www.thinknonlinear.com/NewtonHooke/)

L'expression de l'invariant peut être généralisé à une force conservative quelconque (c'est-à-dire une force qui s'exprime comme le gradient d'une fonction, appelée "énergie potentielle"). Revenons, par simplicité, à un problème à une dimension. Des équations du mouvement discrétisées :

$$x_{n+1} = x_n + h v_n \quad (35)$$

$$v_{n+1} = v_n + h \frac{f(x_{n+1})}{m} \quad (36)$$

on tire :

$$\frac{1}{2} m v_{n+1}^2 = \frac{1}{2} m v_n^2 + \frac{h^2}{2m} f(x_{n+1})^2 + h v_n f(x_{n+1}) \quad (37)$$

On remplace dans le deuxième terme du second membre une puissance de  $f(x_{n+1})$  par son expression en fonction de  $v_n$  et  $v_{n+1}$ . On obtient :

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 - \frac{1}{2}hv_{n+1}f(x_{n+1}) = \frac{1}{2}mv_n^2 + \frac{1}{2}hv_n f(x_{n+1}) \quad (38)$$

que l'on peut encore écrire, au premier ordre en  $h$  :

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 - \frac{1}{2}hv_{n+1}f(x_{n+1}) = \frac{1}{2}mv_n^2 + hv_n f(x_{n+1}) - \frac{1}{2}hv_n f(x_n) \quad (39)$$

Il suffit maintenant d'exprimer le fait que la force dérive d'une énergie potentielle  $U$  :

$$f(x_{n+1}) = -\frac{U(x_n) - U(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} \quad (40)$$

$$= \frac{1}{hv_n} [U(x_n) - U(x_{n+1})] \quad (41)$$

et l'on obtient la relation :

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 + U(x_{n+1}) - \frac{1}{2}hv_{n+1}f(x_{n+1}) = \frac{1}{2}mv_n^2 + U(x_n) - \frac{1}{2}hv_n f(x_n) \quad (42)$$

A trois dimensions, cette expression se généralise sous la forme :

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 + U(\vec{r}_{n+1}) - \frac{1}{2}h\vec{v}_{n+1} \cdot \vec{f}(\vec{r}_{n+1}) = \frac{1}{2}mv_n^2 + U(\vec{r}_n) - \frac{1}{2}h\vec{v}_n \cdot \vec{f}(\vec{r}_n) \quad (43)$$

### 3 Représentation du mouvement dans l'espace position-vitesse

La discrétisation des équations du mouvement répond à la question : comment passe-t-on du point de coordonnées  $(x_n, v_n)$  au point de coordonnées  $(x_{n+1}, v_{n+1})$  ? Elle permet donc une introduction très naturelle de la représentation géométrique du mouvement dans l'espace position-vitesse (représentation dite de Poincaré).

#### 3.1 Quatre discrétisations possibles

Les deux algorithmes envisagés jusqu'ici peuvent être complétés par deux autres algorithmes possibles, qui tous représentent des approximations différentes, mais de même ordre, des équations différentielles :

$$\dot{x} = v \quad (44)$$

$$\dot{v} = \frac{f(x)}{m} \quad (45)$$

Les formules suivantes fournissent l'ensemble des quatre algorithmes :

(a)

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hv_n \\v_{n+1} &= v_n + h \frac{f(x_n)}{m}\end{aligned}\quad (46)$$

(b)

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hv_{n+1} \\v_{n+1} &= v_n + h \frac{f(x_{n+1})}{m}\end{aligned}\quad (47)$$

(c)

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hv_{n+1} \\v_{n+1} &= v_n + h \frac{f(x_n)}{m}\end{aligned}\quad (48)$$

(d)

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hv_n \\v_{n+1} &= v_n + h \frac{f(x_{n+1})}{m}\end{aligned}\quad (49)$$

Le premier algorithme correspond à la méthode d'Euler. On peut préciser en ajoutant le qualificatif d'*explicite*, puisque les seconds membres des relations de récurrence sont fonctions des variables  $x_n$  et  $v_n$  connues explicitement au temps discret  $n$ . La seconde est connue sous le nom de méthode d'Euler *implicite*. Puisqu'elle permet d'exprimer le couple  $x_n, v_n$  en fonction du couple  $x_{n+1}, v_{n+1}$ , elle est la "renversée du temps" de l'approximation d'Euler explicite. Elle fait décroître l'énergie du système, comme le lecteur est invité à le vérifier dans le cas de l'oscillateur harmonique. Les deux autres méthodes d'approximations (c) et (d) (cette dernière étant celle de Newton-Hooke) ne traitent pas de la même manière les dérivées de la position et de la vitesse.

### 3.2 Interprétations géométriques

L'étude de l'oscillateur harmonique permet d'éclairer à nouveau l'origine de la difficulté de la méthode d'Euler avec la conservation de l'énergie. Reprenons donc le cas du mobile soumis à une force :  $f(x) = -kx$ . Il est pratique d'introduire la variable sans dimension  $\tau$  en posant :

$$\tau = \omega_0 t \quad (50)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (51)$$

Dans ce cas, les équations du mouvement s'écrivent simplement :

$$\dot{x} = v \quad (52)$$

$$\dot{v} = -x, \quad (53)$$

les dérivées étant prises maintenant par rapport à la variable  $\tau$ . Posons  $z = x + iv$ . L'équation pour  $z$  qui se déduit des équations du mouvement est donnée par :

$$\dot{z} = -iz \quad (54)$$

dont la solution est :

$$z(\tau) = z(0) \exp(-i\tau) \quad (55)$$

Cette expression permet de relier  $z_{n+1}$  à  $z_n$  de façon exacte :

$$z_{n+1} = z_n \exp(-ih) \quad (56)$$

Il s'agit par conséquent d'une rotation dans le plan complexe d'angle  $-h$ . En revenant aux variables position-vitesse, elle s'écrit :

$$x_{n+1} = \cos(h)x_n + \sin(h)v_n \quad (57)$$

$$v_{n+1} = -\sin(h)x_n + \cos(h)v_n \quad (58)$$

L'approximation d'Euler revient en fait à remplacer l'exponentielle par son développement de Taylor à l'ordre un :

$$\exp(ih) = 1 - ih + O(h^2) \quad (59)$$

Au premier ordre, la rotation exacte est remplacée par le produit d'une rotation d'angle  $-h$  et d'une dilatation de rapport  $\sqrt{1+h^2}$ . En effet, la récurrence double s'écrit :

$$x_{n+1} = x_n + hv_n \quad (60)$$

$$v_{n+1} = -hx_n + v_n \quad (61)$$

d'où il ressort que "l'énergie"  $\frac{1}{2}v_{n+1}^2 + x_{n+1}^2$  évolue selon la loi :

$$\frac{1}{2}(v_{n+1}^2 + x_{n+1}^2) = \frac{1}{2}(v_n^2 + x_n^2)(1 + h^2) \quad (62)$$

L'approximation d'Euler brise en fait la réversibilité temporelle, symétrie fondamentale de la mécanique en l'absence de forces de frottement. Inverser le sens

du temps revient, dans la solution exacte, à effectuer une rotation d'angle inversé. L'inversion des relations de récurrence (61) conduit à :

$$x_n = \frac{x_{n+1} - hv_{n+1}}{1 + h^2} \quad (63)$$

$$v_n = \frac{hx_{n+1} + v_{n+1}}{1 + h^2} \quad (64)$$

L'inversion du temps dans l'approximation d'Euler est donc équivalente au produit d'une rotation d'angle  $h$  et d'une contraction de rapport  $1/\sqrt{1+h^2}$ .

## 4 Conclusion

Nous avons montré qu'une variante de la méthode d'Euler permettait une meilleure approximation des solutions des équations différentielles de la mécanique. Cet algorithme a été suggéré pour la première fois par Robert Hooke dans une lettre adressée à Isaac Newton. La construction de Hooke, reprise et modifiée par Newton, constitue la pierre angulaire des Principia<sup>4</sup>.

La méthode du premier ordre notée (c) dans la section 3 de cet article semble avoir été découverte par accident en 1981 par une étudiante qui, en intervertissant deux lignes dans un programme informatique, s'est aperçue que les trajectoires du problème de Kepler ne divergeaient plus ! Dans la communauté des physiciens, il est connu comme l'algorithme d'Euler-Cromer [7], du nom du patron de thèse de l'étudiante en question... La méthode d'intégration la plus populaire est du second ordre. Elle approxime les dérivées au deuxième ordre dans le pas de temps  $h$ . Elle est associée aux noms de Stormer [8], qui l'a introduite pour étudier le mouvement des électrons dans les aurores boréales, et de Verlet [9], qui l'a utilisée pour étudier les propriétés des fluides par l'étude de la dynamique des molécules individuelles. Cet algorithme est aussi connu sous le nom de "leapfrog". Cette méthode a été pour la première fois utilisée par Joseph Delambre, célèbre en particulier pour sa contribution à la mesure de la méridienne [10].

La discussion présentée dans cet article nous semble avoir une portée au delà du point d'histoire qu'il contient. Les cours de mécanique utilisés à l'Université ont tous entériné le point de vue *continu* représenté par l'écriture d'équations différentielles. Ce point de vue permet d'établir avec une grande économie de moyens les lois de conservation associées aux invariances des lois de la physique

---

<sup>4</sup>S'il est vrai que le calcul différentiel est né au 17<sup>ème</sup> siècle des travaux de Newton et de Leibnitz, cette affirmation représente un raccourci historique extraordinaire ([11]) : le modèle mécanique de Newton, qui sous-tend son approche du calcul différentiel, est bien différent de celui de Leibnitz

par translation dans le temps (conservation de l'énergie), dans l'espace (conservation de la quantité de mouvement) et par rotation (conservation du moment angulaire) ; il permet également d'obtenir des solutions analytiques à certains problèmes-types. Mais l'abandon total (l'oubli ?) de la démarche initiale des fondateurs de la mécanique représente une perte réelle, parce qu'y sont associées des images mentales qui permettraient une meilleure compréhension du sujet. Curieusement, ce sont les possibilités offertes par la simulation numérique qui permettent de raviver l'approche discrète de la mécanique, laquelle débouche, ainsi que nous l'avons esquissé ici, sur une *géométrie du mouvement* à laquelle l'intuition physique peut s'accrocher facilement. Cette approche géométrique ne serait-elle donc pas l'outil privilégié pour faire surgir la dimension culturelle de la mécanique classique ? N'oublions pas, de surcroît, que les problèmes solubles analytiquement sont rares (ce sont ceux qui figurent dans les livres : l'oscillateur harmonique et le potentiel en  $1/r$  !) et qu'il convient donc de donner les outils qui permettent de penser à la fois les cas analytiques et les autres. L'espace de Poincaré constitue l'un de ces outils, en ce qu'il permet de mettre en place une vision qualitative du mouvement, toujours pertinente.

### Remerciements

Ce travail a été initié à l'occasion d'une rencontre sur la "Dynamique Qualitative", organisée par C. Deschamps et l'un des auteurs (P.C.) aux Treilles. Nous remercions la Fondation des Treilles pour avoir permis l'organisation de ce colloque.

### Références

- [1] [http : //www.cordis.lu/science – society/](http://www.cordis.lu/science-society/)
- [2] voir par exemple, *Histoire d'Algorithmes*, Belin, (1993) et E. Hairer et G. Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer (2000).
- [3] M. Nauenberg, *Hooke, Orbital motion, and Newton's Principia*, American Journal of Physics, 62, 331-350 (1994) ; M. Nauenberg, *Robert Hooke's Seminal Contribution to Orbital Dynamics*, The Royal Society of London, Juillet 2003, téléchargeable depuis le site [http ://mike.ucsc.edu/ michael/](http://mike.ucsc.edu/michael/)
- [4] Les extraits de textes cités proviennent de la traduction des *Principia* par I.B. Cohen et A. Whiteman, University of California Press, (1999).
- [5] M. Blay, *Les "Principia" de Newton*, Paris, PUF, (1995).
- [6] M. Blay, *La naissance de la mécanique analytique*, PUF, (1992).
- [7] A. Cromer, *Stable solutions using the Euler Approximation*, American Journal of Physics, 49, 455 (1981).

- [8] C. Stormer, *Sur les trajectoires des corpuscules électrisés*, Arch. Sci., 24 (1907)
- [9] L. Verlet, *Computer experiments on condensed fluids I; thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules*, Phys. Rev., 159, 98 (1967).
- [10] D. Guedj, *La méridienne*, Pocket, 2003.
- [11] voir par exemple "Mathématiques au Fil des Ages", Gauthier Villars, (1987).