Perte d’équilibre d’un cylindre inhomogène

P. Coullet[1], J.M. Gilli, M. Monticelli
INLN, 1361 route des lucioles, 06560 Valbonne

J.C Noiret et J.P. Romagnan
LPMC, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2

1 Introduction

La perte d’équilibre d’un cylindre inhomogène sur un plan incliné fournit un exemple très simple de bifurcation. Les équilibres des machines simples ne sont pas robustes, puisqu’ils n’existent que lorsque les paramètres qui les caractérisent sont ajustés très précisement. Cette absence de robustesse est à l’origine de l’intérêt même de ces machines. Considérons par exemple un cylindre homogène posé sur un plan horizontal. Négligeant les forces de frictions statiques, le cylindre peut être déplacé sans effort puisqu’il n’est soumis à aucune autre force. Si l’on incline légèrement le plan, le cylindre, soumis à la gravité, perd son équilibre et se met à rouler. La force nécessaire pour maintenir le cylindre en équilibre est d’autant plus faible que l’inclinaison du plan est petite, justifiant ainsi l’utilisation du plan incliné pour déplacer verticalement des objets lourds. Les équilibres naturels sont généralement robustes, ils persistent lorsque l’on varie leurs paramètres. Ainsi une goutte attachée à un robinet qui équilibre son poids avec la tension de surface existe pour tout une gamme de paramètres extérieurs (tension de surface, gravité, volume, rayon du robinet, masse volumique du fluide). Cependant, elle cesse d’exister lorsque ces paramètres atteignent des valeurs critiques. La perte de robustesse de l’équilibre, c’est à dire sa disparition dans ce cas, est une bifurcation générique. L’absence de robustesse est souvent liée à une symétrie particulière du système considéré. Ainsi pour le plan horizontal, l’existence d’une famille continue de solutions d’équilibres obtenues par une rotation du cylindre est une conséquence directe de la symétrie du cylindre par rapport à son centre. Si l’on déplace le centre de gravité du cylindre en plaçant une masse excentrée, cette symétrie est alors brisée. L’équilibre devient alors robuste et peut ”résister” jusqu’à une valeur critique de l’inclinaison. Le but de cet article est d’étudier cette bifurcation élémentaire. Connue sous le nom de bifurcation noeud-col, nous la nommerons ”bifurcation par perte d’équilibre”. Cet article est divisé en trois parties. La première est consacrée à la statique. La dynamique, en l’absence de friction

[1]Membre de l’Institut Universitaire de France

est considérée dans la deuxième partie. La troisième partie est consacrée à l'effet important d'une friction visqueuse.

2 L'analyse statique

On considère la dynamique de roulement d'un cylindre de rayon R, de masse m dont le centre de gravité est situé à une distance r de son centre ($r > R$). Le cylindre est posé sur un plan incliné. On notera α l'angle que fait le plan avec le plan horiozontal. On suppose que le mouvement du cylindre est un mouvement de roulement pur. A l'équilibre, le moment du poids par rapport au point de contact S est nul. La construction des points d'équilibres E (stable) et F (instable) est illustrée sur la figure (1)[2]. La condition d'existence des points E et F est simplement donnée par $OC < r$, c'est à dire

$$R \sin\alpha < r$$

Dans le triangle SOE

$$\frac{OS}{\sin(SEO)} = \frac{OE}{\sin\alpha}$$

L'angle SOE étant relié à l'angle d'équilibre stable Θ_E par

$$SOE = \pi - (\alpha + \Theta_E)$$

on a

$$\sin(\Theta + \alpha) = \frac{R}{r}\sin\alpha$$

L'angle de l'équilibre instable Θ_F obéit à la même équation. Lors de la perte d'équilibre $(R/r)\sin\alpha_c = 1$. L'angle critique où les deux équilibres se confondent est donné par

$$\Theta_c = \frac{\pi}{2} - \alpha_c$$

La bifurcation SC devient tangente au cercle de rayon r. On définit les écarts au paramétre critique α_c et à l'angle critique Θ_c

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - \alpha_c - \Psi$$

et

$$\alpha = \alpha_c - \epsilon$$

[2]Les points d'équilibre sont donnés par une construction d'Euclide des solutions l'équation du second degré !

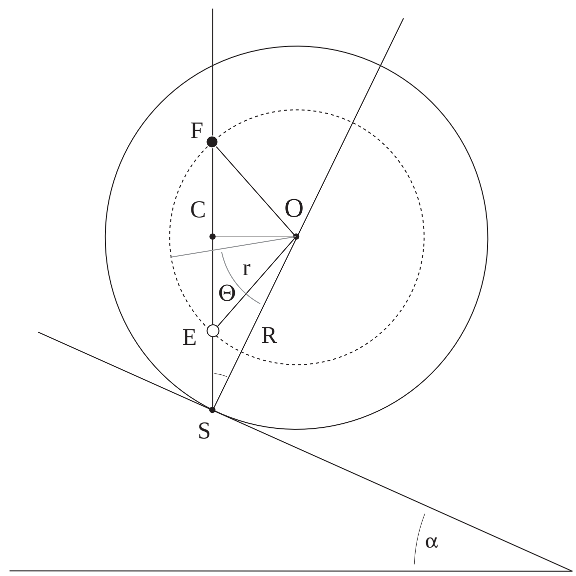

FIG. 1 – Construction des équilibres

L'équation des équilibres s'écrit dans ces nouvelles variables

$$\cos(\epsilon + \Psi) = \frac{R}{r} \sin(\alpha_c - \epsilon)$$

Au voisinage de la bifurcation Ψ et ϵ étant petits, on peut développer les deux membres de cette équation par rapport à Ψ et ϵ.

$$\Psi^2 + 2\epsilon\Psi + \epsilon^2 + O((\epsilon + \Psi)^4) = 2\epsilon\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{r^2}} + O(\epsilon^2)$$

Seuls les ordres dominants on été conservés dans les deux membres de l'équation. Si l'on ne retient que les termes du même ordre on obtient

$$\Psi^2 = 2\epsilon\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{r^2}} + O(\epsilon^2, \epsilon\Psi)$$

Cette équation met en évidence la relation entre les deux petits paramètres : $\Psi = O(\sqrt{|\epsilon|})$. Cette relation caractérise génériquement la bifurcation par perte d'équilibre, puisque la disparition des équilibres se produit généralement par un contact quadratique. Si l'on pose $z = (2(R^2 - r^2)/r^2)^{-1/4}\Psi$, cette équation devient simplement

$$f(z) = \epsilon - z^2 = 0$$

Pour ϵ négatif, les solutions réelles cessent d'exister et deviennent purement imaginaires. Dans ce régime de paramètre, que l'on qualifiera de supercritique par la suite, le cylindre perd son équilibre et se met à rouler sur le plan incliné. Cependant la mise en mouvement est caractérisée par un temps caractéristique très grand, puisque le moment des forces qui impose le mouvement est alors très petit.

3 Dynamique

Les corrdonnées du centre de gravité dans le référentiel fixe xOy (voir figure (2)) sont données par

$$\begin{aligned} x &= R\Theta - r\sin\Theta \\ y &= -r\cos\Theta \end{aligned}$$

L'énergie potentielle est donnée par

$$E_p = mgh$$

où h représente la hauteur du centre de gravité par rapport à un plan horizontal de référence (voir Annexe).

$$h = R(\cos\alpha - \Theta\sin\alpha) - r\cos(\Theta + \alpha)$$

$$E_p = mgh = mgR(\cos\alpha - \Theta\sin\alpha) - r\cos(\Theta + \alpha)$$

L'expression de l'énergie cinétique est donnée par

$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2 - 2rR\cos\Theta)\dot{\Theta}^2$$

L'équation du mouvement est obtenue directement en dérivant l'énergie par rapport au temps. Elle s'écrit

$$(R^2 + r^2 - 2rR\cos\Theta)\ddot{\Theta} + rR\sin\Theta\dot{\Theta}^2 - g(R\sin\alpha - r\sin(\Theta + \alpha)) = 0$$

En choisissant comme unité de temps

$$\tau = \sqrt{\frac{R^2}{rg}}$$

l'équation du mouvement devient

$$(1+\rho^2-2\rho\cos\Theta)\ddot{\Theta}+\rho\sin\Theta\dot{\Theta}^2-(\mathcal{G}-\sin(\Theta+\alpha))=0$$

ou $\rho = r/R$. Le paramètre de bifurcation $\mathcal{G}$ est donné par

$$\mathcal{G} = \frac{\sin\alpha}{\rho}$$

La bifurcation par perte d'équilibre se produit lorsque $\mathcal{G} > 1$ [3]. Fixons $\rho < 1$ et posons

$$\alpha = \alpha_c - \epsilon, \quad , \Theta = \Theta_c - \Psi$$

ou $\sin\alpha_c = \rho$ et $\Theta_c = \pi/2 - \alpha_c$. L'équation du mouvement devient alors

$$(1+\rho^2-2\rho\sin(\Psi+\alpha_c))\ddot{\Psi}+\rho\cos(\Psi+\alpha_c)\dot{\Psi}^2-(\mathcal{G}-\cos(\Psi+\epsilon))=0$$

et

$$\mathcal{G} = 1-\epsilon\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\rho^2}}$$

A l'ordre dominant l'équation devient

$$(1-\rho^2)\ddot{\Psi}-\rho\sqrt{1-\rho^2}\dot{\psi}^2=\epsilon\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\rho^2}}-\frac{1}{2}\Psi^2$$

Le changement de variable

$$\frac{1}{2}\Psi^2 = |\epsilon|\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\rho^2}}\chi^2$$

et le choix de τ comme nouvement échelle de temps

$$\tau = (\frac{2}{|\epsilon|})^{\frac{1}{4}}(\frac{\rho^2}{1-\rho^2})^{\frac{1}{8}}$$

permet de simplifier l'équation différentielle qui, à la limite des petites valeurs de ϵ, devient simplement

$$\ddot{\chi} = \sigma - \chi^2$$

où $\sigma = \epsilon/|\epsilon|$ est le signe de ϵ.

[3] Cette condition peut être réalisée seulement si $\rho < 1$

4 Dynamique dans un milieu résistif

On introduit un couple visqueux dans l'équation du mouvement

$$(R^2 + r^2 - 2r\,R\cos\Theta)\ddot{\Theta} + \delta\dot{\Theta} + r\,R\sin\Theta\dot{\Theta}^2 - g(R\sin\alpha - r\,\sin(\Theta+\alpha)) = 0$$

En pratique on place des aimants sur le cylindre et on le fait rouler au voisinage d'une plaque conductrice non magnétique. Les courants de Foucault qui apparaissent sont à l'origine de la dissipation de l'énergie mécanique du roulement du cylindre. La distance entre les aimants et la plaque métallique permet de modifier le coefficient de viscosité magnétique.

$$(1-\rho^2)\ddot{\Psi} + \delta\dot{\Psi} - \rho\sqrt{1-\rho^2}\dot{\psi}^2 = \epsilon\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\rho^2}} - \frac{1}{2}\Psi^2$$

5 Annexe 1 : Calcul de la hauteur du centre de gravité

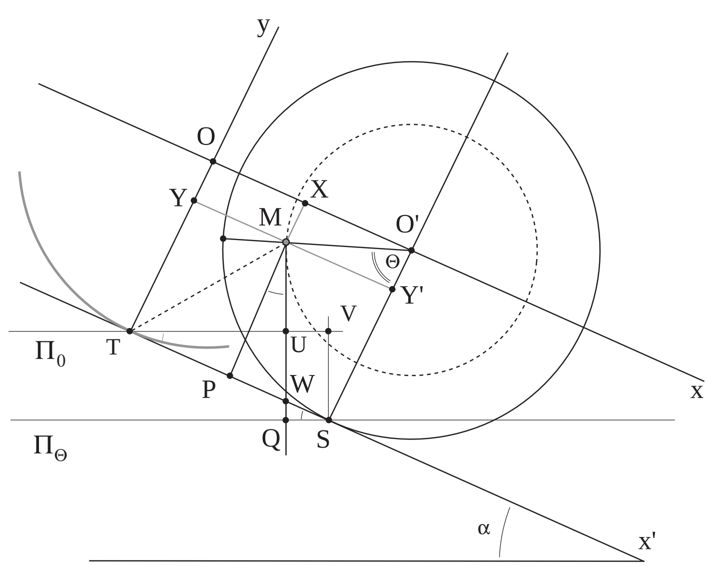

FIG. 2 – Mouvement du centre de gravité du cylindre

La figure (2) illustre le mouvement du centre de gravité (M). Le repère choisi $x0y$ est centré sur le cylindre. Il est défini par la condition $\Theta_M = 0$. Le plan horizontal de réference Π_0 est defini comme le plan passant par le point de contact du cylindre avec le plan incliné lorsque le cylindre est dans sa position initiale ($\Theta = 0$). L'énergie potentielle est donnée par

$$E_p = mgh$$

où h est la distance du centre de gravité au plan Π_0. Sur la figure $h = MU$. On vérifie que

$$\begin{aligned} MU &= MQ - UQ \\ &= MQ - TS \sin\alpha \end{aligned}$$

La condition de roulement sans glissement se traduit par $TS = R \sin\Theta$. On a

$$MQ = MW + RQ$$

où $MW = MP \cos\alpha$. On a

$$\begin{aligned} MP &= OT - OY \\ &= R - r \cos\Theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} WQ &= WS \sin\alpha \\ &= (PS - PW) \sin\alpha \\ &= (r \sin\alpha - PW) \sin\alpha \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} PW &= MP \tan\alpha \\ &= (R - r \cos\alpha) \tan\alpha \end{aligned}$$

On a ainsi

$$WQ = (r \sin\Theta - (R - r \cos\Theta) \tan\alpha) \sin\alpha$$

et

$$MQ = \frac{R - r \cos\Theta}{\cos\alpha} + (r \sin\Theta - (R - r \cos\Theta) \tan\alpha) \sin\alpha$$

et finalement

$$\begin{aligned} h &= (R - r \cos\Theta) \cos\alpha - (R\Theta - r \sin\Theta) \sin\alpha \\ &= R \cos\alpha - R\Theta \sin\alpha - r \cos(\Theta + \alpha) \end{aligned}$$

Les équilibres sont donnés par la minimisation de l'énergie potentielle

$$R \sin\alpha = r \cos(\Theta + \alpha)$$

Une façon plus directe pour calculer la hauteur du centre de gravité consiste à remarquer qu'il s'agit simplement de l'ordonnée de ce point dans le référentiel dont l'axe des x est horizontal. On rappelle que dans le référentiel d'origine $(y0x)$ la position du centre de gravité (M) est donnée par

$$\begin{aligned} x &= R\Theta - r \sin\Theta \\ y &= -r \cos\Theta \end{aligned}$$

Dans le référentiel yTx', elles deviennent $(\vec{TM})$

$$\begin{aligned} x' &= R\Theta - r \sin\Theta \\ y' &= R - r \cos\Theta \end{aligned}$$

$h = MU$ est l'ordonnée du point M dans le référentiel $y''0x''$, tourné d'un angle α par rapport au référentiel $y0x'$. C'est donc l'ordonnée MU' du point M' tourné d'un angle $-\alpha$. (voir figure (3).

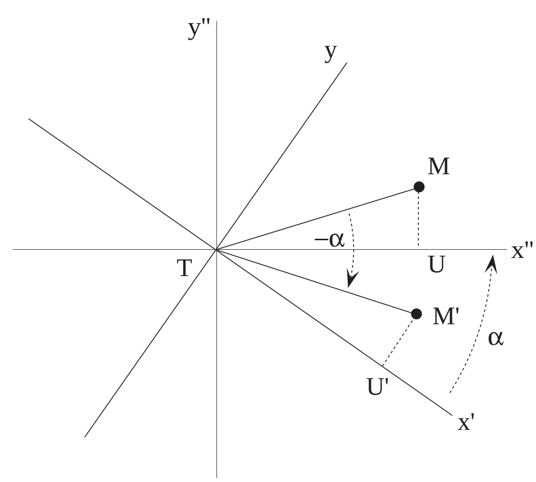

FIG. 3 – Rotation du plan incliné

$$\begin{aligned} h &= -(R\Theta - r \sin\Theta) \sin\alpha + (R - r \cos\Theta) \cos\alpha \\ &= R(\cos\alpha - \Theta \sin\alpha) - r \cos(\Theta + \alpha) \end{aligned}$$