

La perte d'équilibre d'un cube

P. Couillet et M. Monticelli *

20 mars 2003

1 Introduction

Un parallélépipède homogène de section carré est posé sur un plan que l'on peut incliner (voir figure 1). Les revêtements du parrallélépipède et de la surface sur laquelle il repose l'empêche de glisser. Le parallélépipède est placé perpendiculairement à la ligne du plus grande pente. Lorsque l'on incline le plan, en faisant varier lentement son inclinaison α , le parallélépipède perd l'équilibre au delà de 45° . L'absence de glissement induit alors la rotation du parallélépipède par rapport à son arrête située en aval de la pente. Le but de cet article est d'étudier la perte d'équilibre du solide en tant que phénomène de bifurcation. Il permettra également d'illustrer l'utilisation des méthodes géométriques dans l'analyse du mouvement.

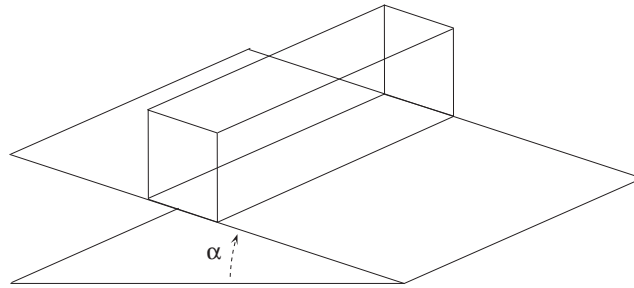


FIG. 1 – Esquisse du système étudié.

2 Les oscillations et les rotations sur le plan horizontal

Nous commençons par étudier la dynamique de rotation sur un plan horizontal. On peut, sans perte de généralité, remplacer le problème du parallélépipède par celui d'un carré de masse m qui peut tourner autour de l'un de ses sommets en contact avec la surface. On notera Θ l'angle que fait le centre du carré par rapport à la verticale. Cet angle, mesuré à partir du sommet de rotation, est compté positivement dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est à dire dans le sens opposé du sens trigonométrique usuel. L'équilibre instable est situé en $\Theta = 0$. C'est un état d'équilibre car le moment du poids du carré par rapport à son point de rotation

*INLN, 1361 route des lucioles, 06560 Valbonne

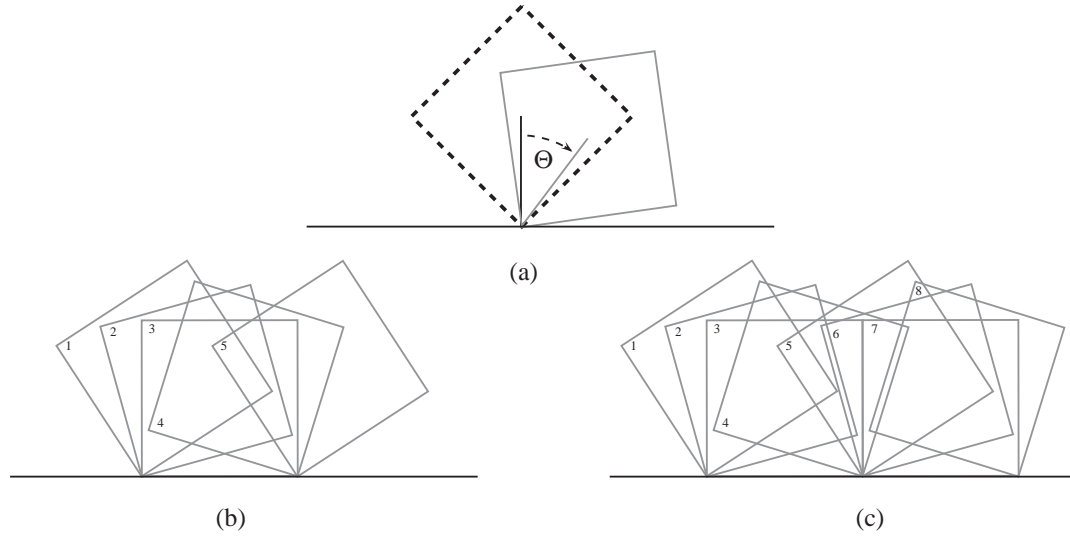


FIG. 2 – La dynamique du carré sur un plan horizontal. (a) Définition de l’angle Θ de repérage du centre de gravité du carré (b) Oscillations du carré. La séquence périodique des positions est donné par : (1),(2),(3),(4),(5),(4),(3),(2),(1), ... (c) Rotations du carré. La séquence des positions est donnée par (1),(2),(3),(4),(5),(6),(7),(8),..

est nul en cette position. Il est instable car le centre de gravité du solide se situe au dessus de son axe de rotation. Les deux autres équilibres correspondent aux angles $\Theta = \pm\pi/4$. Ils "équilibrent" la réaction de la surface plane avec le poids du carré.

La dynamique de rotation du carré, se décompose en un mouvement de rotation du centre de gravité autour du point de rotation et un choc lors duquel l’un des faces entre en contact avec la surface plane.

- (i) *La modélisation du mouvement de rotation.* Entre deux chocs le mouvement est simplement celui d’un corps rigide en rotation autour d’un axe sous l’effet de la gravité. L’énergie de ce système mécanique ¹ s’écrit

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\Theta}^2 + mgl \cos \Theta$$

ou, $I = ml^2/3$ est le moment d’inertie du carré massif relatif à l’un de ses sommets, m la masse du carré, l la longueur de la demi-diagonale. L’équation du mouvement est donnée par

$$\tau^2 \ddot{\Theta} - \sin \Theta = 0 \tag{1}$$

ou $\tau = \sqrt{I/mgl}$. Le choix de τ comme unité de temps (voir Annexe 1) permet simplifier cette équation

$$\ddot{\Theta} - \sin \Theta = 0$$

- (ii) *La modélisation du choc.* Supposons que l’on mette le carré en mouvement soit en lui communiquant un moment angulaire positif (resp. négatif) ou en déplaçant son centre de gravité vers la droite (resp. gauche) de la position d’équilibre instable, c’est à dire avec un angle Θ tel que $\pi/4 > \Theta > 0$ (resp. $-\pi/4 < \Theta < 0$). Dans son mouvement, l’une des faces du carré, initialement verticale, vient heurter la surface en $\Theta = \pi/4$ (resp. $\Theta = -\pi/4$). Si l’on suppose que le choc est parfait, le

¹Il s’agit simplement d’un pendule solide

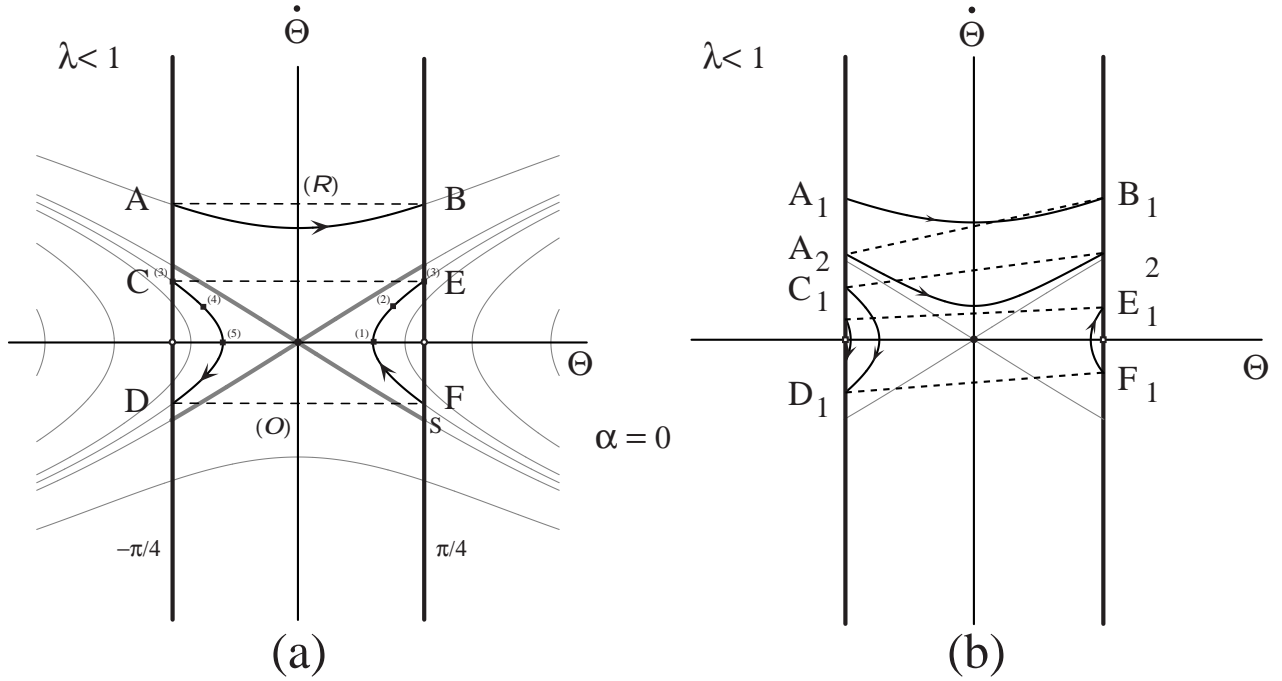


FIG. 3 – Construction des trajectoires du carré à l’aide du portrait de phase de l’équation (1). (a) Le cas des chocs élastiques. On a représenté deux trajectoires typiques : celle qui correspond à un régime d’oscillation (noté \mathcal{O}) et celle qui correspond à un régime de rotation (noté \mathcal{R}). Dans le cas de la trajectoire oscillante, on a représenté les points correspondants aux instantanés du mouvement dans l’espace physique noté de (1) à (5) sur la figure 2.b. (b) Le cas des chocs inélastiques. Une trajectoire typique noté $A_1B_1A_2B_2C_1D_1E_1F_1\dots$ a été dessinée. Elle représente deux rotations du carré ($A_1B_1A_2B_2$), suivie d’une oscillation amortie ($C_1D_1E_1F_1\dots$).

moment angulaire acquis, est à l’origine d’une nouvelle rotation qui s’effectue à présent par rapport au sommet du carré qui vient de heurter la surface plane. Si le moment angulaire initial est plus grand qu’une certaine valeur critique, le mouvement de rotation se poursuit alors. Le cube se déplace alors par rotations successives vers la droite (resp. gauche). Lorsque le choc n’est pas parfait, la perte d’énergie peut être modélisée en introduisant un coefficient de restitution $0 < \lambda < 1$. Il permet de relier les vitesses angulaires avant et après le choc

$$\dot{\Theta}_+ = \lambda \dot{\Theta}_-$$

ou $\dot{\Theta}_\pm$ représente les vitesses après et avant le choc. Lorsque la restitution de l’énergie n’est pas parfaite ($\lambda < 1$), le solide s’arrête au bout d’un nombre fini de rotations.

La dynamique du carré sur le plan horizontal est ainsi décrite par l’équation (1). Lors d’un choc ($\Theta_c^{(-)} = \pm\pi/4$) la vitesse angulaire est multiplié par la facteur de restitution λ . Le changement du point autour duquel le carré tourne se traduit simplement par l’inversion de l’angle juste après le choc, $\Theta_c^{(+)} = -\Theta_c^{(-)} = \mp\pi/4$. Muni de cette règle simple on peut utiliser le portrait de phase de l’équation (1) pour décrire qualitativement le mouvement. On étudie successivement

- (i) *Le choc élastique.* Le coefficient de restitution est égal à un dans ce cas. Sur la figure (3.a) on a tracé les deux types de

trajectoires : les oscillations autour des positions d'équilibres stables (noté (1) sur la figure) et les rotations qui entraînent un mouvement horizontal du solide (2). La séparatrice (noté S) entre ces deux comportements est également représentée sur cette figure. Par souci de simplicité, on considérera seulement le cas des vitesses initiales positives. On notera dans la suite A_i (resp. B_i) les points dans l'espace des phases après (resp. avant) les chocs, dans le régime de rotation. Dans le régime oscillant C_i, F_i (resp. D_i, E_i) représentent les points après (resp.) un choc.

- (ii) *Le choc inélastique.* Dans ce cas, à cause de la perte d'énergie cumulative lors des chocs successifs, le carré solide finit par s'arrêter. Les trajectoires correspondantes sur le portrait de phase sont dessinées sur la figure (3.b).

3 La dynamique sur le plan incliné

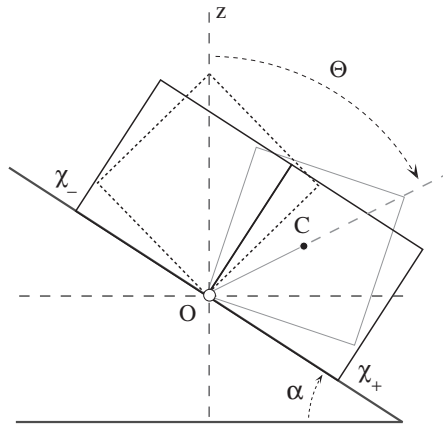


FIG. 4 – On a représenté le carré dans ses positions d'équilibre aval et amont ($\Theta = \chi_{\pm} = \alpha \pm \pi/4$), le carré dans sa position d'équilibre instable ($\Theta = 0$) et le carré dans une position arbitraire Θ .

La dynamique entre deux chocs est inchangée lorsque l'on incline le plan. La rotation du carré s'effectue alors entre $\Theta = \chi_{\pm} = \alpha \pm \pi/4$. Lorsque $\alpha = \pi/4$, les équilibres stable et instable se confondent. Au delà de cette valeur de l'inclinaison, il n'existe plus d'équilibre puisque le moment du poids par rapport au centre de rotation est alors toujours différent de zéro.

3.1 Etude du cas élastique

- (i) *Les inclinaisons sous-critiques.* Lorsque l'angle d'inclinaison est inférieur à $\pi/4$, on observe sur le portrait de phase les régimes d'oscillations et de rotations, séparées par une courbe noté S sur la figure (5).
- (ii) *Les inclinaisons super-critiques.* Lorsque l'angle d'inclinaison est supérieur à $\pi/4$, les équilibres cessent d'exister. Toutes les trajectoires décrivent des mouvements de rotation.

3.2 Etude du cas inélastique

On commence par étudier les inclinaisons super-critiques, plus simple à analyser.

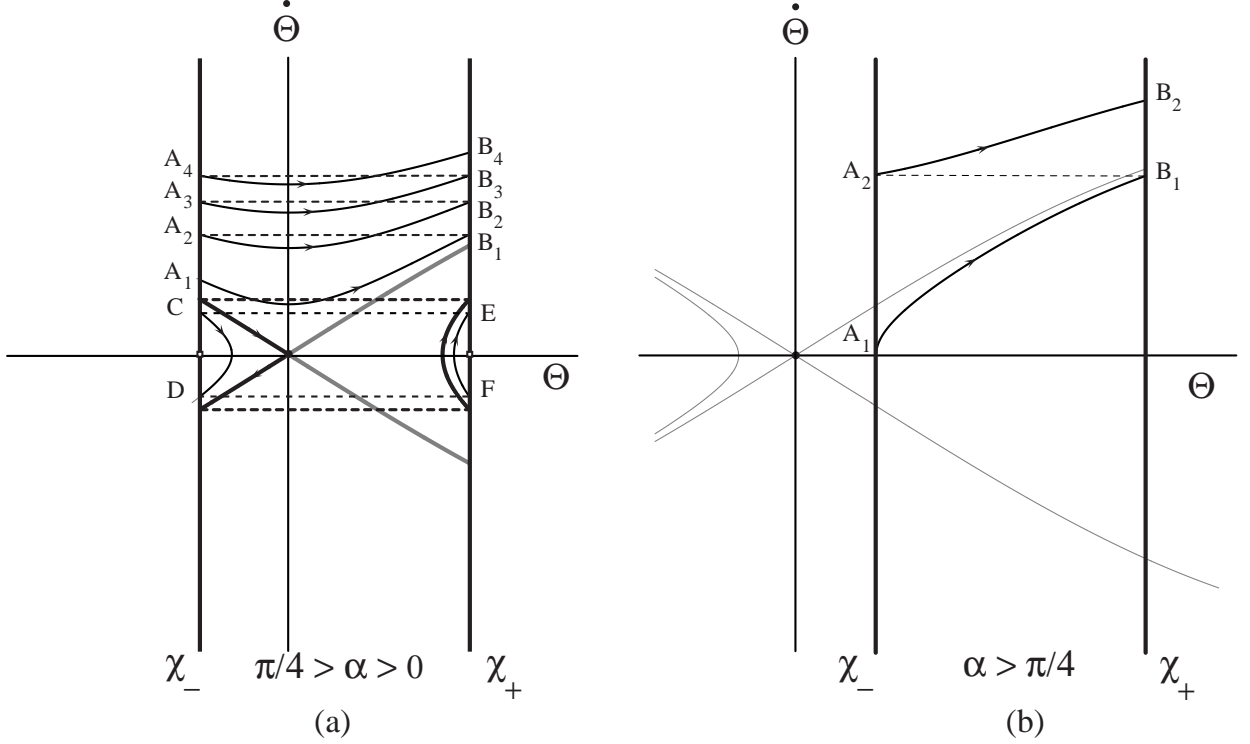


FIG. 5 – Mouvements du carré analysés sur les trajectoires correspondantes du portrait de phase de l'équation (1) dans le cas de chocs élastiques. On a noté A_i (resp. B_i) les points correspondants aux positions et vitesse après (resp. avant) un choc dans le régime de rotation. Les points notés C_i, E_i (resp. D_i, F_i) correspondent aux positions et vitesse après (resp. avant) un choc dans le régime d'oscillation. (a) Pour une pente inférieure à 45° on distingue les régimes de rotation des régimes d'oscillations, dépendant de la condition initiale. (b) Lorsque la pente est supérieure à 45° toutes les trajectoires représentent des rotations du carré.

- (i) **Le cas super-critique :** $\alpha > \pi/4$. Pour ces inclinaisons le carré est toujours en rotation. Sur le portrait de phase de la figure (7) on a dessiné une trajectoire typique. A chaque choc, le solide perd une certaine fraction d'énergie. Il atteint asymptotiquement trajectoire limite définie par $\lambda\Omega_-^* = \Omega_+^*$, ou Ω_-^* est la vitesse avant un choc et Ω_+^* , celle après le choc, dans le régime asymptotique. L'énergie du solide que l'on a supposé constante entre deux chocs permet d'obtenir l'expression de la vitesse de la trajectoire limite en fonction de l'inclinaison.

$$\frac{1}{2}\Omega_-^{*2} + \cos(\alpha + \pi/4) = \frac{1}{2}\Omega_+^{*2} + \cos(\alpha - \pi/4)$$

ou encore

$$\Omega_+^{*2} = \frac{2\sqrt{2}\lambda^2 \sin \alpha}{(1 - \lambda^2)}$$

On notera dans la suite Ω_L cette vitesse limite. La conservation de l'énergie entre deux chocs permet également d'obtenir la relation de récurrence entre les énergies cinétiques du solide $T_{n+1} = \frac{1}{2}\Omega_{A_{n+1}}^2$ et $T_n = \frac{1}{2}\Omega_{A_n}^2$ après deux chocs successifs

$$\frac{1}{2}\Omega_{A_n}^2 + \cos(\alpha - \pi/4) = \frac{1}{2}\Omega_{B_n}^2 + \cos(\alpha + \pi/4)$$

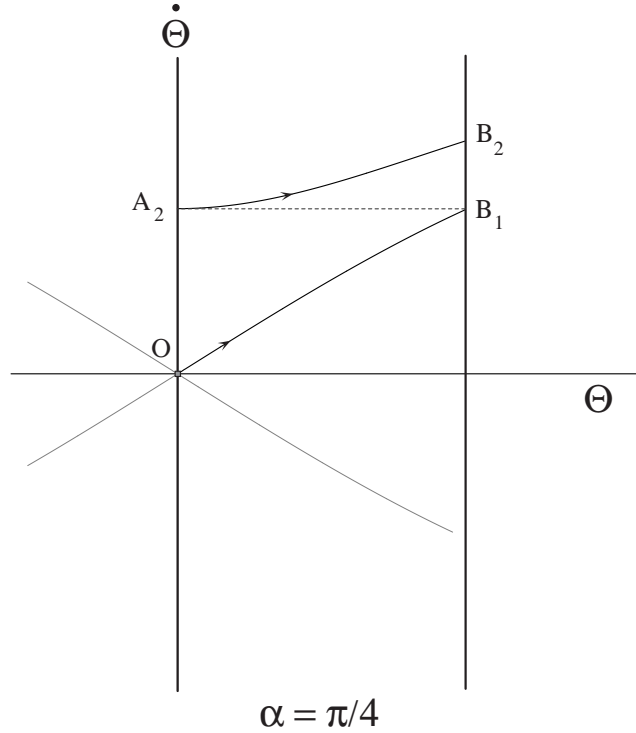


FIG. 6 – Portrait de phase de l'équation (1) pour $\alpha = \pi/4$. Le point d'équilibre stable et le point d'équilibre instable sont alors confondus ($\Theta = -\pi/4$). On a considéré sur cette figure la trajectoire qui est issue de ce point double. Elle le quitte en un temps infini. Lorsque α est légèrement supérieur à $\pi/4$, une condition initiale $\Theta(0) = -\alpha$ et $\dot{\Theta}(0) = 0$, c'est à dire telle que l'une des faces du carré soit posée sur le plan incliné, quitte cette position au bout d'un temps qui est d'autant plus long que l'on est proche de l'angle critique $-\pi/4$.

ou A_n et B_n (voir figure (5)) sont tels que $\Theta_{A_n} = -\pi/4$ et $\Theta_{B_n} = \pi/4$. Après le choc la nouvelle vitesse $\Omega_{A_{n+1}} = \lambda \Omega_{B_n}$. La relation de récurrence, que l'on obtient en utilisant cette condition de choc

$$T_{n+1} = \lambda^2 (T_n + \sqrt{2} \sin \alpha)$$

permet l'étude du mouvement du solide en rotation, en ne l'observant qu'au moment du choc. Cette technique, très utilisée dans l'analyse des systèmes dynamiques "chaotiques" est connue sous le nom de la section de Poincaré. La relation de récurrence qui relie les énergies cinétiques est l'application de Poincaré du système dynamique. On trouve évidemment que $T^* = \frac{1}{2} \Omega_L^2$ est le point fixe de cette application.

- (ii) **Le cas sous-critique :** $\alpha \leq \pi/4$. Pour des inclinaisons inférieures à $\pi/4$, le portrait de phase accessible, c'est à dire le domaine angulaire $-\pi/4 < \Theta < \pi/4$, contient la séparatrice S qui sépare oscillations amorties autour de l'équilibre et rotations. Le régime bistable dans lequel le solide peut soit effectuer des rotations ou soit être en équilibre dépend de la valeur du coefficient de restitution. Lorsque l'on diminue le coefficient de restitution, les trajectoires sélectionnées ont une

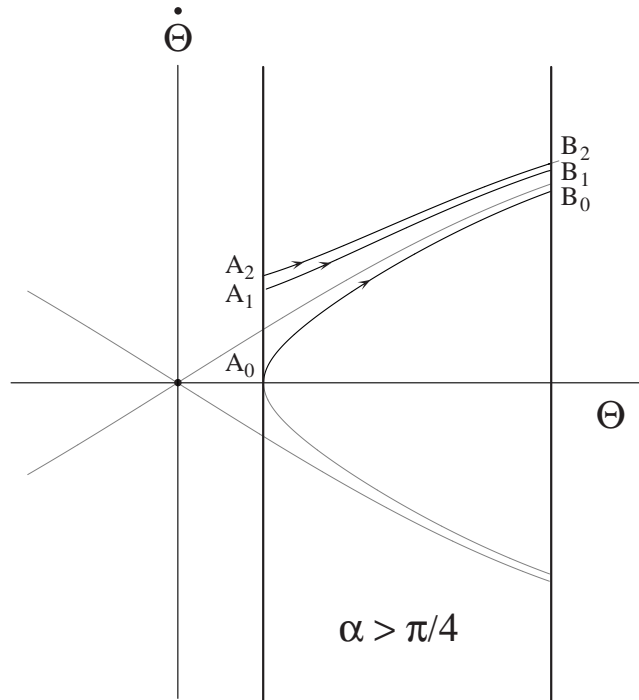


FIG. 7 – Portrait de phase de l'équation (1) pour $\alpha > \pi/4$. On a choisi par souci de simplicité $\lambda = .5$. Les trajectoires convergent vers une trajectoire limite $A_\infty B_\infty$. Les vitesses sont définies par la relation de récurrence $\dot{\Theta}_{B_{n+1}} = 2\dot{\Theta}_{A_n}$. La trajectoire limite est telle que $\dot{\Theta}_{B_\infty} = 2\dot{\Theta}_{A_\infty}$.

énergie de plus en plus basse, de telle sorte que pour un coefficient de restitution critique, elle se confond avec la séparatrice. Pour des valeurs plus faibles du facteur de restitution, les trajectoires de rotation cesse d'exister. Jusqu'à cette valeur de λ , λ_c , le solide peut être soit au repos, soit en rotation permanente. Pour des valeurs plus faibles que λ_c , seul l'état d'équilibre stable existe. La vitesse d'un solide avant un choc ($\Theta = -\pi/4$) correspondant à la séparatrice est obtenu en utilisant la conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}\Omega_S^2 + \cos(\alpha - \pi/4) = E_S$$

ou E_S est l'énergie correspondant à la séparatrice. Evalué au point d'équilibre instable $\Theta = -\alpha$, $\dot{\Theta} = 0$, on trouve $E_S = 1$. La relation entre l'inclinaison critique et le coefficient de restitution critique est alors donné par $\Omega_L = \Omega_S$. Après simplification le coefficient de restitution critique s'écrit

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha - \pi/4)}{1 - \cos(\alpha + \pi/4)}} \quad (2)$$

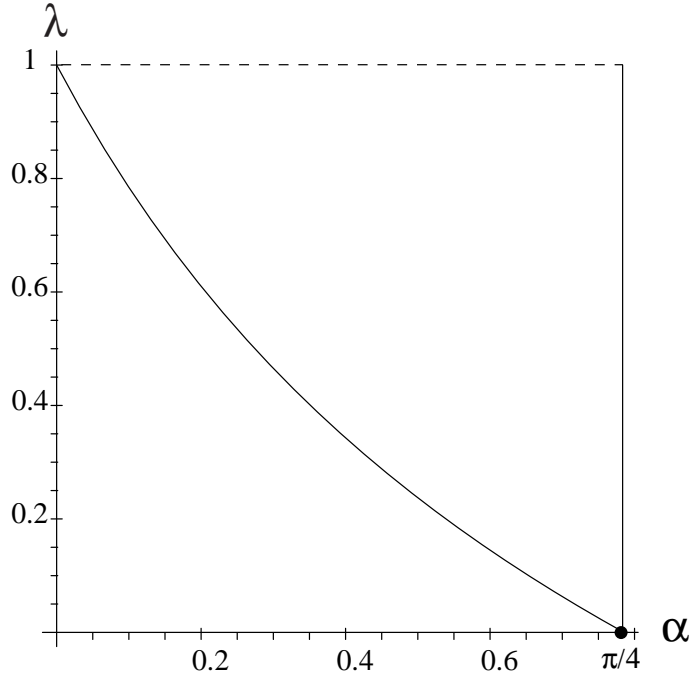


FIG. 8 – Le diagramme de phase de la chute. La perte d'équilibre se produit sur la droite $\alpha = \pi/4$. La courbe représente la ligne critique au delà de laquelle le régime bistable disparaît. Pour chaque valeur du coefficient de restitution, la perte s'équilibre se produit pour un angle dit statique $\alpha_s = \pi/4$. L'équilibre est retrouvé lorsque cet angle devient inférieur à un certain angle dynamique α_d obtenu en inversant l'expression (2) par rapport à alpha.

L'application de Poincaré dans le cas sous-critique est discontinue. Notons T_s l'énergie cinétique correspondant à la séparatrice $T_s = 1 - \cos(\alpha - \pi/4)$

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \lambda^2 T_n & T < T_s \\ T_{n+1} &= \lambda^2 (T_n + \sqrt{2} \sin \alpha) & T > T_s \end{aligned}$$

4 Conclusion

Nous avons décrit dans cet article la dynamique de chute d'un cube sur un plan incliné. Nous avons analysé deux bifurcations élémentaires en utilisant les méthodes de la théorie qualitative des systèmes dynamiques. L'espace des phases d'un pendule massif

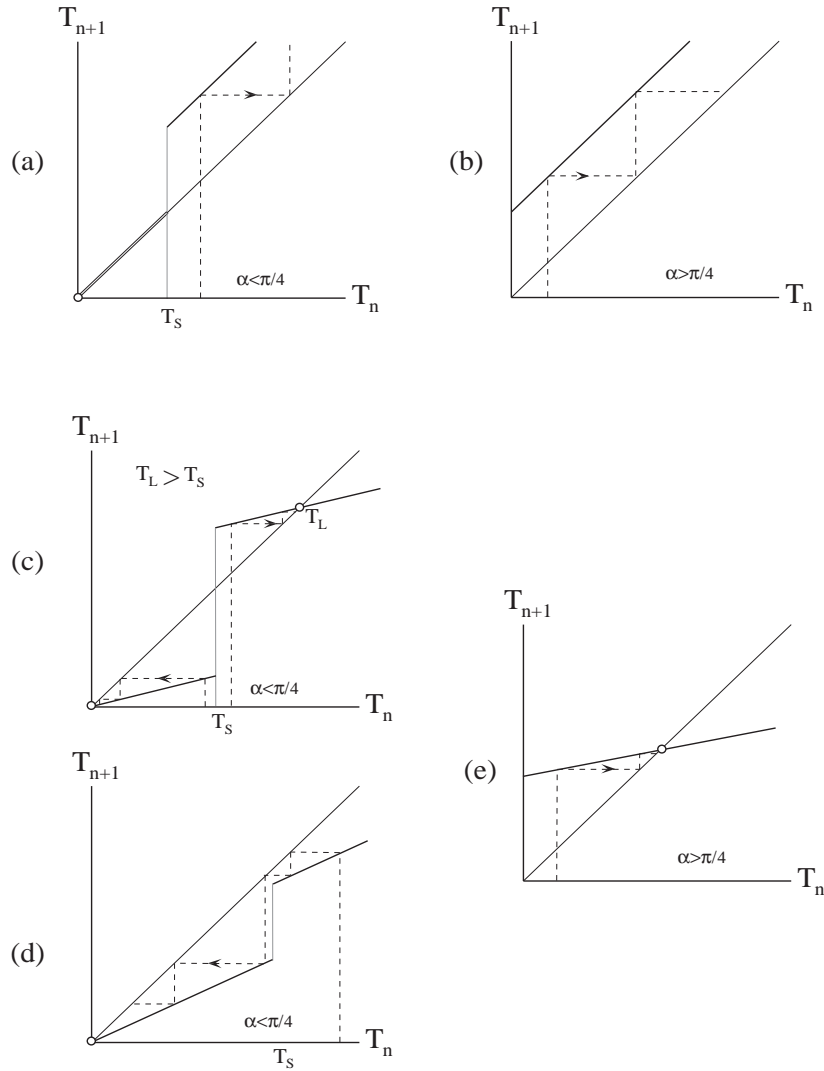


FIG. 9 – Relation de recurrence entre les énergies cinétiques de deux chocs successifs : (a) et (b) Le cas des chocs élastiques. (c),(d),(e) Le cas des chocs inélastiques. (c) correspond au régime bistable ($\alpha > \alpha_d$) dans lequel équilibres et rotations existent simultanément et (d) au régime monostable, sans hystérèse.

nous a permis de décrire la chute du cube. La relation de récurrence entre les énergies cinétiques de deux chocs successifs, connue sous le nom d'application de Poncaré, nous a permis d'étudier quantitativement le mouvement du cube. Au delà d'une pente de 45° les équilibres du cube disparaissent. Cette bifurcation par "perte d'équilibre" est très fréquente en physique. Ainsi une goutte pendante à l'extrémité d'un robinet cesse d'exister au delà d'un certain volume critique. La bifurcation par perte d'équilibre présente un hystérèse d'autant plus importante que le coefficient de restitution est voisin de 1. Une fois l'équilibre rompu, le cube chute. Si l'on diminue alors la pente du plan incliné, le cube continuera à chuter. Il s'arrêtera lorsque cette pente devient inférieure à une certaine pente critique $\alpha_d(\lambda)$. Cette bifurcation marque la fin ou l'apparition du domaine de bistabilité. En effet pour des angles

compris entre $\alpha_d(\lambda)$ et $\pi/4$, le cube peut être soit dans un état d'équilibre ou dans un état de chute. Cette seconde bifurcation est aussi très fréquente. Dans le voyage Terre-Lune de Jules Verne, cette bifurcation correspond à la vitesse critique qu'il faut dépasser pour envoyer une fusée sur la lune ! La perte d'équilibre peut être étudiée expérimentalement au moyen d'un dispositif très simple constitué d'un pendule pesant soumis à un couple constant (voir [1]). Le modèle étudié ici correspond à une "caricature" d'un modèle d'avalanche (voir [2]).

5 Appendices

5.1 Analyse dimensionnelle

L'équation de la dynamique du solide entre deux chocs est donné par

$$\tau^2 \ddot{\Theta} - \sin(\Theta + \alpha) = 0 \quad (3)$$

ou $\tau = \sqrt{\frac{I}{mgl}}$. Dans le cas où toute la masse m est concentrée au centre du carré, $I = ml^2$, ou l représente la longueur de la demi-diagonale on a : $\tau = \sqrt{\frac{l}{g}}$. Pour un carré homogène $I = \frac{1}{3}ml^2$ et $\tau = \sqrt{\frac{l}{3g}}$. Le temps caractéristique τ apparaît ainsi comme le seul paramètre de ce problème. Le choix de ce temps comme nouvelle unité de temps permet de simplifier l'équation du mouvement. En effet introduisant un temps "sans dimension" $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$ et une nouvelle variable angulaire

$$\tilde{\Theta}(\tilde{t}) = \Theta(\tau\tilde{t}) = \Theta(t)$$

L'équation du mouvement s'écrit de façon universelle

$$\frac{d^2\tilde{\Theta}}{d\tilde{t}^2} - \sin(\tilde{\Theta} + \alpha) = 0$$

L'interprétation physique de ces manipulations formelles est très simple. Le choix de τ comme unité de temps rend le problème universel dans le sens où il ne dépend plus d'aucun paramètre. Cette procédure très fréquente en mécanique des fluides consiste simplement à choisir comme unité d'un problème les quantités qui le caractérisent. Les nouvelles variables sont alors sans dimension ! Le temps \tilde{t} n'est pas ainsi un temps au sens dimensionnel, mais un nombre réel sans dimension qui mesure le rapport entre le temps réel et le temps caractéristique τ . En effet si $\frac{d^2\Theta}{dt^2}$ représente la vitesse angulaire, la quantité $\tau^2 \frac{d^2\Theta}{dt^2}$ est alors sans dimension. Elle représente l'accélération angulaire lorsque l'unité de temps choisi est τ .

5.2 Portrait de phase du pendule rigide

Il s'agit de l'outil central de la théorie des systèmes dynamiques, introduit par H. Poincaré dans sa thèse. Il avouait avoir été inspiré par l'idée, apprise à l'école secondaire, que l'on peut dessiner l'allure d'une fonction sans calculer toutes ses valeurs, en considérant ses maxima et minima, ses points de discontinuité, les intervalles de croissance et de décroissance, .. L'idée d'allure d'une fonction a été étendue par Poincaré à celle de "portrait de phase" d'une équation différentielle, qui a une portée beaucoup plus grande et qui a en elle des idées nouvelles de nature qualitative - point d'équilibre, stabilité, instabilité, bifurcations, etc.. dans l'étude des équations différentielles. Nous résumons ici brièvement la construction du portrait de phase du pendule pesant standard ² (Eq. 1). Cette équation différentielle du second ordre peut s'écrire sous la forme de deux équations différentielles couplées du premier ordre

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= \Omega \\ \dot{\Omega} &= \sin \Theta \end{aligned}$$

²L'angle Θ est pris par rapport à la verticale et compté positivement dans le sens contraire au sens trigonométrique

L'équation différentielle peut alors s'interpréter comme décrivant le mouvement d'un mobile fictif dans le plan $\Theta - \Omega$ dont la vitesse est donné par le vecteur

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \Omega \\ \sin \Theta \end{pmatrix}$$

Ce vecteur définit le champ de vecteur associée à l'équation différentielle. Le mouvement du mobile fictif est tangent en tout

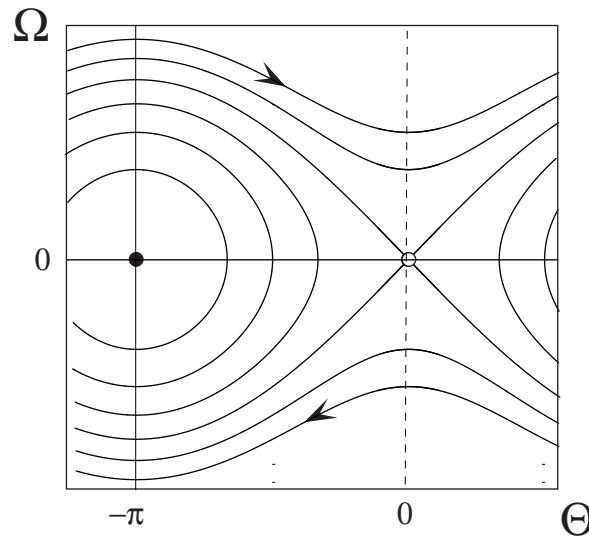


FIG. 10 – Portrait de phase du pendule rigide dans le domaine angulaire pertinent. On remarque les cercles autour de la position stable, les hyperboles près de la solutions stable et les rotations qui pour une valeur de l'énergie élevée deviennent des droites horizontales.

point au champ de vecteur. Le tracé du champ de vecteur se fait en général de façon qualitative, dans le même sens que celui du tracé qualitatif des fonctions. Les courbes partout tangentes au champs de vecteur sont les courbes intégrales. Elles représentent géométriquement les solutions de l'équation différentielle. Dans le cas du pendule et plus généralement des problèmes mécaniques à un degré de liberté, ces courbes s'indentifient aux courbes de niveau de l'énergie totale du système. Bien que cette façon de tracer les courbes intégrales ne soit pas dans l'esprit de Poincaré, nous avons choisi cette méthode ici par souci de concision. L'énergie du pendule pesant, dans les variables appropriées, s'écrit

$$\frac{1}{2}\Omega^2 + \cos(\Theta) = E$$

Afin de tracer le portrait de phase on considère trois limites simples de cette expression

- (i) Le voisinage de l'équilibre instable : $\Omega = 0$, $\Theta = 0$. Le developpement de Taylor du cosinus à l'ordre deux permet de donner une expression plus simple à l'énergie

$$\Omega^2 - \Theta^2 = 2(E - 1)$$

On reconnait dans cette expression l'équation d'une famille hyperboles équilatère. On peut aussi l'écrire sous la forme

$$XY = K$$

ou $X = \Omega + \Theta$, $Y = \Omega - \Theta$ et $K = 2(E - 1)$

(ii) Le voisinage de l'équilibre stable³ : $\Omega = 0$, $\Theta = \pi$. En posant $\Theta = \pi + \Psi$, l'énergie devient

$$\frac{1}{2}\Omega^2 - \cos(\Psi) = E$$

Le developpement de Taylor à l'ordre deux permet d'étudier le voisinage de cet équilibre

$$\Omega^2 + \Theta^2 = 2(E + 1)$$

Les lignes intégrales sont dans cette limite des cercles concentriques.

(iii) La limite des grandes vitesses : $\Omega^2 \gg 1$. Dans ce cas on peut négliger l'énergie potentielle qui en norme est toujours plus petite que un.

$$\Omega^2 = 2E$$

Les lignes intégrales sont alors simplement des droites parallèles a l'axe des positions.

Références

- [1] "A damped pendulum forced with a constant torque", P. Coulet, J.M. Gilli, M. Monticelli et N. Vandenberghe, preprint INLN (2003)
- [2] "Dynamics of a grain on a sandpile model", L. Quartier, B. Andreotti, S. Douady and A. Daerr, Phys. Rev. E, **62**, 8299 (2000)

³Cette position n'est jamais accessible au solide sur le plan incliné, car elle se situe en dessous de ce dernier